## Л 4. Скалярное произведение векторов. Угол между векторами. Перпендикулярные вектора Векторное произведение векторов. Смешанное произведение.

**Цель лекции:** сформировать у студентов понимание скалярного, векторного и смешанного произведений векторов, научить находить угол между векторами, определять перпендикулярность, вычислять векторное произведение и объем параллелепипеда. Развить навыки использования координатных формул и геометрических интерпретаций векторных произведений.

**Основные вопросы**

- Скалярное произведение векторов.
- Формула для скалярного произведения в координатах.
- Угол между векторами и условие перпендикулярности.
- Направляющие косинусы вектора.
- Векторное произведение: определение, свойства, координатная формула.
- Коллинеарность векторов.
- Площадь параллелограмма и треугольника через векторное произведение.
- Смешанное произведение: определение, свойства, координатная формула.
- Объем параллелепипеда и тетраэдра.
- Компланарность векторов.

**Краткое содержание:** в лекции изучаются скалярное, векторное и смешанное произведения векторов, их свойства и координатные формулы. Рассматриваются условия перпендикулярности, коллинеарности и компланарности векторов, а также геометрические приложения: вычисление площадей фигур и объемов тел, построенных на векторах.

**Определение. Скалярным произведением** векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними, т.е.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\left(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}\right).$$

Скалярное произведение обозначается символами $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\vec{a}\,\vec{b}$, $\left(\vec{a}\,\vec{b}\right)$. Для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ верно соотношение $\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot \text{ПР}_{\vec{a}}\,\vec{b}=\left|\vec{b}\right|\text{ПР}_{\vec{b}}\,\vec{a}$.

**Теорема.** Пусть в базисе $\left\{\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right\}$ вектор $\vec{a}$ имеет координаты $(x_1, y_1, z_1)$, а вектор $\vec{b}-(x_1, y_1, z_1)$. Тогда $\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$.

**Пример.** Если $\vec{a}=(1,2,3)$, а $\vec{b}=(4,5,6)$, то $\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot4+2\cdot5+3\cdot6=32$.

**Следствие 1.** Если вектор $\vec{a}=(x,y,z)$, в базисе $\left\{\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right\}$, то $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ .

**Следствие 2.** Косинус угла $\varphi$ между векторами $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$ и $\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$ равен:

$$cos\,\varphi=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}.$$

**Следствие 3.** Векторы $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$ и $\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$ перпендикулярны только в том случае, когда $|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$ .

**Определение.** Направляющими косинусами ненулевого вектора $\vec{a}$ называются косинусы углов, образованных этим вектором с осями координат $Ox, Oy, Oz$ .

Обычно эти углы обозначаются через $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ .

**Следствие 4.** Для вектора $\vec{a}$ с координатами $(x,y,z)$ направляющие косинусы записываются в виде: $\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$; $\cos\beta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$; $\cos\gamma=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$;

**Определение**. Векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$, удовлетворяющий трем условиям: **а)** Модуль вектора $\vec{c}$ равен произведению модулей векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на синус угла между ними: $\vec{a}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\left(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}\right)$; **в)** $\vec{c}$ перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т.е. он перпендикулярен плоскости, проходящей через вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$; **с)** Тройка векторов $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ - правая.

1°. В отличие от скалярного произведения, векторное произведение антикоммутативно, т.е. для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ верно: $\vec{b}\times\vec{a}=-\vec{a}\times\vec{b}$ .

2°. Ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны только в том случае, когда $\vec{a}\times\vec{b}=0$ .

3°. Постоянный множитель можно выносить за знак векторного произведения, т.е. для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и числа $\lambda$ верно $\left(\alpha\,\vec{a}\right)\times\vec{b}=\lambda\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$.

4°. Векторное произведение обладает свойством дистрибутивности, т.е. для любых векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{b}$ верно $(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \times \vec{b} = \vec{a}_1 \times \vec{b} + \vec{a}_2 \times b$.

**Теорема.** Пусть в базисе $\left\{ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \right\}$ векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеют координаты $(x_1, y_1, z_1)$ и $(x_2, y_2, z_2)$ соответственно.

Тогда в этом базисе $\vec{a} \times \vec{b} = ((y_1 z_2 - z_1 y_2), (x_1 z_2 - z_1 x_2), (x_1 y_2 - y_1 x_2))$.

Для запоминания этой формулы используется её запись в виде условного определителя:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix},$$

который необходимо разложить по первой строке.

**Пример**. Пусть $\vec{a} = (1,2,3,)$, $\vec{b} = (4,5,6)$,

Найдем $\vec{a} \times \vec{b}$.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \vec{i}(2 \cdot 6 - 3 \cdot 5) - \vec{j}(1 \cdot 6 - 3 \cdot 4) + \vec{k}(1 \cdot 5 - 2 \cdot 4) = -3\vec{i} + 6\vec{j} - 3\vec{k} = (-3, 6, -3).$$

**Следствие 1.** Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, равна: $S_{пар} = \left| \vec{a} \times \vec{b} \right| = \sqrt{(y_1 z_2 - z_1 y_2)^2 + (x_1 z_2 - z_1 x_2)^2 + (x_1 y_2 - y_1 x_2)^2}$.

Площадь треугольника, построенного на этих векторах, равна:

$$S_{тр} = \frac{1}{2} \left| \vec{a} \times \vec{b} \right| = \frac{1}{2} \sqrt{(y_1 z_2 - z_1 y_2)^2 + (x_1 z_2 - z_1 x_2)^2 + (x_1 y_2 - y_1 x_2)^2}.$$

**Следствие 2**. Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = (x_1, y_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2)$, лежащих в плоскости $Oxy$, равна: $S_{пар} = |x_1 y_2 - y_1 x_2|$. Площадь треугольника, построенного на векторах, равна: $S_{тр} = \frac{1}{2}|x_1 y_2 - y_1 x_2|$.

**Определение. Смешанным произведением** трех векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется число, равное скалярному произведению векторного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ с вектором $\vec{c}$.

Оно обозначается символами $\vec{a}, \vec{b}, \vec{n}$ или $\vec{a}\vec{b}\vec{n} : \vec{a}\vec{b}\vec{n} = \left( \vec{a} \times \vec{b} \right) \vec{c}$.

**Свойства смешанного произведения**

$1^0$. Смешанное произведение векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ равно ± объему параллелепипеда, построенного на этих векторах: $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \pm V_{пар}$. Здесь знак «+» берется в случае, если тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – правая, «–» если она левая.

$2^0$. Векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{n}$ – являются компланарными только в том случае, когда их смешанное произведение равно 0: $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}=0$.

$3^0$. При перестановке местами любых двух векторов смешанного произведения оно меняет свой знак на противоположный; т.е.

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{n} = -\vec{a}\,\vec{c}\,\vec{b} = \vec{c}\,\vec{a}\,\vec{b} = -\vec{c}\,\vec{b}\,\vec{a} = \vec{b}\,\vec{c}\,\vec{a} = -\vec{b}\,\vec{a}\,\vec{c}.$$

$4^0$. Постоянный сомножитель можно выносить из любого сомножителя смешанного произведения, т.е. для любых векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и числа $\lambda$ $\left(\lambda\vec{a}\right)\vec{b}\,\vec{c} = \lambda\,\vec{a},\vec{b},\,\vec{c}$.

$5^0$. Смешанное произведение дистрибутивно для любого сомножителя, т.е. для любых векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2,\ \ \vec{b}, \vec{c}$ верно: $\left(\vec{a}_1+\vec{a}_2\right)\vec{b}\,\vec{c}=\vec{a}_1\,\vec{b}\,\,\vec{c}+\vec{a}_2\,\vec{b}\,\,\vec{c}$.

**Теорема.** Пусть в базисе $\left\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\}$ векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ имеют координаты соответственно $(x_1, y_1, z_1)$, $(x_2, y_2, z_2)$ и $(x_3, y_3, z_3)$, тогда их смешанное произведение записывается в виде определителя: $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$.

**Следствие.** Объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}=(x_1, y_1, z_1,)$, $\vec{b}=(x_2, y_2, z_2,)$, $\vec{c}=(x_3, y_3, z_3,)$, равен: $V_{пар}=\left|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right|$.

Объем тетраэдра (треугольной пирамиды), образованного этими векторами, равен:

$$V_{тетр}=\frac{1}{6}\left|abc\right|.$$

**Вопросы для самоконтроля**

1. Как определяется скалярное произведение двух векторов?
2. Как вычислить угол между векторами по их координатам?
3. Когда два вектора являются перпендикулярными?
4. Что такое направляющие косинусы?
5. Дайте определение векторного произведения.
6. Как выглядит координатная формула векторного произведения?
7. Что означает условие $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$?
8. Как найти площадь параллелограмма, построенного на двух векторах?
9. Что называется смешанным произведением трех векторов?
10. Как вычислить объем параллелепипеда через смешанное произведение?
11. Когда три вектора являются компланарными?

**Литература**

1. Александров П.С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. — СПб.: Лань, 2009.
2. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. — М.: ФМЛ, 2004.
3. Индивидуальные задания по высшей математике / под ред. А.П. Рябушко. — Минск: Выш. школа, 2009.
4. Махмеджанов Н., Махмеджанова Р.Н. Сборник задач по высшей математике, 2009.